Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS Groupement D1

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsfabcr.fr/assets/annales/bts-fabcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS FABCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, un tableau donne le nombre de personnes équipées d'un implant médical entre 2013 et 2021. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel à partir de données transformées, puis une fonction issue d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau fourni en annexe à rendre avec la copie, en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

Pour chaque année, on calcule $y_i = \ln(N_i - 30)$, avec N_i en milliers, puis on arrondit au millième.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
y_i	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$, avec les rangs de 0 à 8 et les valeurs du tableau, donne une pente proche de $0,0794$ et une ordonnée à l'origine proche de $3,2608$. En arrondissant chaque coefficient au centième, on obtient :

$$y = 0,08k + 3,26.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0,08k + 3,26.$

Question 2.b. En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées, en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

La transformation donne $y = \ln(N - 30)$. En remplaçant y par la droite d'ajustement, puis en exponentiant, on obtient $N - 30 = e^{0,08k+3,26} = e^{3,26}e^{0,08k}$. Comme $e^{3,26} \approx 26,05$, le modèle demandé est bien obtenu. N est exprimé en milliers de personnes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers de personnes.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, estimer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Le rang de 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,701$ milliers. L'arrondi au millier de personnes conduit à 104 000 personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 104 000 personnes.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, déterminer si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.**

Lorsque k tend vers $+\infty$, le terme $e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$. Le modèle prévoit donc un nombre de personnes équipées qui croît sans limite. Il finirait par dépasser la population totale, fixée à 60 millions d'habitants : cette prévision est impossible.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle dépasse à long terme la population stable de 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène $y' + 0,05y = 0$ est de la forme $y' + ay = 0$. Ses solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = 0,05$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante $y(t) = c$, on a $y' = 0$. L'équation devient $0,05c = 0,05$, d'où $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Une solution particulière de (E) est la constante 1. Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à cette solution celles de l'équation homogène associée :

$$y(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **Sachant que g(0) = 8 et que g est solution de (E), en déduire une expression de g sur [0 ; +∞[.**

Dans la solution générale, $g(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$. La condition initiale $g(0) = 8$ donne $1 + C = 8$, donc $C = 7$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0{,}05t}$, pour $t \geq 0$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le nombre d'années depuis 2013 et f(t) est exprimée en milliers de personnes, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées en 2026.**

En 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $f(13) = \frac{450}{1+7e^{-0{,}05\times 13}} \approx 96{,}684$ milliers de personnes. Arrondi au millier de personnes, cela donne 97 000 personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 97 000 personnes.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0{,}05t} \to 0$. Ainsi, $f(t) = \frac{450}{1+7e^{-0{,}05t}} \to 450$. Comme $f(t)$ est exprimée en milliers, le modèle prévoit une stabilisation à 450 000 personnes équipées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Limite : 450 milliers, soit 450 000 personnes équipées.

Question 4. À partir de l'expression de f'(t) fournie par le logiciel de calcul formel, déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La dérivée donnée est $f'(t) = \frac{315e^{-0,05t}}{2(1+7e^{-0,05t})^2}$. Pour tout $t \geq 0$, son numérateur et son dénominateur sont strictement positifs, donc $f'(t) > 0$. La fonction est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

Le seuil est dépassé lorsque $f(t) > 120$. Comme le dénominateur est positif, cela équivaut à $e^{-0,05t} < \frac{2,75}{7}$, soit $t > \frac{\ln(7/2,75)}{0,05} \approx 18,69$. Le seuil est donc dépassé après 18,69 ans depuis 2013. La première année civile correspondante est 2032.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre de personnes équipées dépassera 120 000 en 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Une machine d'usine embouteille de l'eau et dépend d'un réservoir ainsi que d'une file d'entrée de bouteilles vides. L'exercice traite les défauts d'approvisionnement, le nombre de jours de panne sur 200 jours et un test statistique sur le volume d'eau contenu dans un échantillon de 100 bouteilles.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question Association. Associer chacune des quatre phrases aux informations du tableau de droite : probabilité que la file ne se vide pas dans la journée ; événement où la file se vide mais pas le réservoir ; probabilité que la file et le réservoir soient tous deux vides au moins une fois ; probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Écrire les associations sur la copie, sans justification.

La phrase 1 désigne l'événement contraire de A, donc sa probabilité vaut 1 − 0,03. Pour la phrase 2, la file est vide mais le réservoir ne l'est pas : l'événement est $A \cap \bar{B}$. La phrase 3 correspond à $A \cap B$. Enfin, un défaut survient si A ou B se réalise, soit l'union des deux événements indépendants.

Phrase	Correspondance
1	E : 0,97
2	C : $A \cap \bar{B}$
3	F : 0,0006
4	D : 0,0494

✓ RÉPONSE À RETENIR

1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. La probabilité d'une panne un jour quelconque est 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Donner, sans justification, la loi de probabilité suivie par X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque jour correspond à une épreuve de Bernoulli : la panne survient avec la probabilité 0,025 et ne survient pas avec la probabilité 0,975. Les 200 jours sont indépendants et X compte le nombre de pannes. X suit donc une loi binomiale, de paramètre n égal au nombre de jours observés et de paramètre p égal à la probabilité d'une panne quotidienne.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}025)$.

Question 2.a. **La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.**

Pour approcher la loi binomiale par une loi de Poisson, on choisit comme paramètre la moyenne de la loi binomiale, égale au produit du nombre d'épreuves par la probabilité de panne à chaque épreuve.

On obtient donc $\lambda = np$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

Question 2.b. **Pour une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour la loi de Poisson de paramètre 5, la probabilité demandée est la somme des probabilités de 0 à 10 : $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k e^{-5}}{k!} \approx 0{,}9863047$. Arrondie au millième, elle vaut 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule de la loi de Poisson donnée dans le sujet, déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

En appliquant la formule de Poisson pour k = 15 :

$P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{1 \times 2 \times \cdots \times 15}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc cette probabilité est strictement positive. Le graphique la rend seulement difficile à distinguer de zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir du tableau des volumes mesurés et des effectifs pour 100 bouteilles, déterminer à la calculatrice la moyenne x̄ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

La moyenne pondérée par les effectifs est $\bar{x} = \frac{73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7}{100} = 74{,}73$ cL.

L'écart type de la série, calculé à partir de la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne, vaut $\sigma = \sqrt{\frac{73^2 \times 17 + 74^2 \times 20 + 75^2 \times 43 + 76^2 \times 13 + 77^2 \times 7}{100} - 74{,}73^2} \approx 1{,}10$ cL.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\bar{x} = 74{,}73$ cL et $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

Question 2.a. **Pour le test bilatéral au seuil de confiance de 95 % de H_0 : $\mu = 75$ contre H_1 : $\mu \neq 75$, la moyenne Z des volumes de 100 bouteilles suit, sous H_0, une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que $P(75 - h \leq Z \leq 75 + h) \approx 0{,}95$, à 10^{-2} près.**

Pour une loi normale centrée réduite, l'intervalle central contenant 95 % des valeurs est approximativement $[-1{,}96\,;\,1{,}96]$. La demi-largeur cherchée est donc le quantile 1,96 multiplié par l'écart type 0,11, soit 0,2156 cL avant arrondi au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. **Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.**

La zone d'acceptation est centrée sur 75 cL et sa demi-largeur est h = 0,22 cL, obtenue à la question précédente. La décision porte sur la moyenne observée de l'échantillon :

1. Si elle appartient à l'intervalle [74,78 ; 75,22], on accepte H_0.
2. Si elle est hors de cet intervalle, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Accepter H_0 si $74{,}78 \leq \bar{x} \leq 75{,}22$; sinon, la rejeter.

Question 2.c. **À partir des résultats de l'échantillon fourni, déterminer si l'hypothèse H_0 : $\mu = 75$ peut être acceptée.**

La moyenne de l'échantillon est 74,73 cL. Elle se situe en dessous de la borne inférieure 74,78 cL de la zone d'acceptation [74,78 ; 75,22] définie par le test bilatéral. Le résultat observé n'appartient donc pas à la zone d'acceptation de H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : on rejette H_0, car $74{,}73 < 74{,}78$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient dépend de la spécialité. Les deux exercices de 10 points portent sur l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical et sur une machine à embouteiller. Les compétences évaluées incluent modélisation, équations différentielles, probabilités, lois discrètes et test statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement y = ln(N - 30) transforme le modèle N(k) = 30 + Ce^(ak) en une relation affine entre y et k.
- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution constante de l'équation complète et d'une solution de l'équation homogène.
- Le nombre de pannes sur n jours indépendants, de probabilité p chaque jour, suit une loi binomiale B(n, p), approchée ici par une loi de Poisson de paramètre np.
- Dans le test bilatéral, on compare la moyenne observée à l'intervalle centré sur 75 dont la probabilité sous H_0 est de 0,95.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier les unités : les nombres de personnes des modèles sont exprimés en milliers et les volumes d'eau en centilitres.
- Appliquer le logarithme à N - 30 et respecter les arrondis demandés au millième, au centième ou à 10^{-3}.
- Une probabilité de Poisson peut être très petite sans être exactement nulle.
- Calculer la moyenne de l'échantillon avec les effectifs, puis la comparer à l'intervalle de décision du test.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de la droite d'ajustement au modèle exponentiel ?

Avec y = ln(N - 30), une droite y = ak + b donne N = 30 + e^(ak+b), soit N = 30 + e^b e^(ak). Il faut ensuite utiliser les coefficients arrondis selon la consigne du sujet.

Q : Pourquoi le nombre de pannes est-il approché par une loi de Poisson de paramètre 5 ?

Sur 200 jours indépendants, le nombre de pannes suit une loi binomiale de paramètres 200 et 0,025. L'approximation de Poisson prend le paramètre λ = np, donc λ = 200 × 0,025 = 5.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points, chacun avec plusieurs parties. Répartissez le temps entre les exercices, profitez de l'indépendance des parties pour avancer, puis gardez quelques minutes pour vérifier les unités et les arrondis.

Q : Comment appliquer le test sur le volume des bouteilles ?

Sous H_0 : μ = 75, déterminez l'intervalle centré sur 75 de probabilité 0,95. Calculez ensuite la moyenne de l'échantillon et appliquez la règle de décision : elle est acceptée si la moyenne appartient à l'intervalle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsfabcr.fr/assets/annales/bts-fabcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS FABCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Finitions, Aménagements des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.