Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Étude du freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Signaux d'entrée et de sortie d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsfabcr.fr/assets/annales/bts-fabcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS FABCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Étude du freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est freiné, et sa vitesse f(t) est modélisée au cours du temps. Les trois parties étudient une équation différentielle, les variations et la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente de la fonction vitesse.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l’intervalle considéré l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie indique que les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient de y vaut $a = 0,8$. On remplace donc a par cette valeur dans la formule. Ces fonctions sont définies sur l’intervalle demandé $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante égale à 5, donc sa dérivée est nulle pour tout t. En substituant $g(t) = 5$ et $g'(t) = 0$ dans le membre de gauche de l’équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le membre de gauche est bien égal au membre de droite : g est une solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: g est solution.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de l’équation complète : la fonction constante $g(t) = 5$. Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant à cette solution particulière toute solution de l’équation homogène associée. D’après la question précédente, ces solutions homogènes sont de la forme $ke^{-0,8t}$, avec k réel. On obtient ainsi l’ensemble demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale de (E) est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. Pour déterminer la constante, on applique la condition initiale $f(0) = 20$. Comme $e^0 = 1$, on obtient $5 + k = 20$, donc $k = 15$. En remplaçant k par cette valeur, on trouve l'unique solution qui vérifie la condition initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

On utilise l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, et l'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Par conséquent, le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers zéro. Le terme constant restant vaut 5, ce qui donne la limite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative de f se rapproche alors de la droite horizontale d'équation $y = 5$ lorsque l'abscisse augmente sans borne. Cette droite est donc l'asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **Sachant que f'(t) = −12e^(−0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle : la fonction f est strictement décroissante. Elle vaut 20 à l'origine et tend vers 5 quand t tend vers $+\infty$. Le tableau résume son signe dérivé et ses variations.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit atteindre zéro. Or, pour tout instant $t \geq 0$, le terme $15e^{-0,8t}$ est strictement positif. Il en résulte que $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse diminue et se rapproche de 5, mais elle ne s'annule jamais dans le modèle étudié.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ sans atteindre 0.

Question 4.a. Vérifier que la fonction F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation d'une exponentielle composée, le premier terme dérivé vaut $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t}$, et la dérivée de $5t$ vaut 5. Le coefficient exponentiel obtenu est 15. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, donc F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4.b. À l'aide de l'intégrale de la vitesse, calculer la distance parcourue entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 est $d = F(1) - F(0)$. En évaluant la primitive aux bornes, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation numérique donne environ $15,325$ m. Arrondie au centimètre, cette distance vaut $15,33$ m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \text{m} \approx 15,33\ \text{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Parmi les propositions, seule la troisième présente ce reste et les bons coefficients.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f(0) + f'(0)t$. On sait que $f(0) = 20$, et la dérivée donnée dans l'énoncé permet de calculer $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Signaux d’entrée et de sortie d’un système électrique

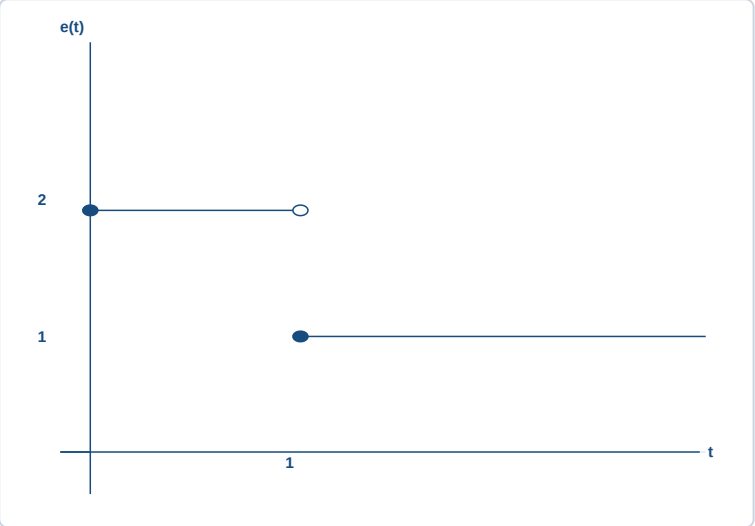
Un système électrique de fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1) reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1). À l’aide des transformées de Laplace, il faut représenter l’entrée, établir la sortie s(t), puis étudier sa valeur en t = 1 et sa limite à l’infini.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme le signal est causal, il vaut 0 pour $t < 0$. Pour $0 \leq t < 1$, seul $U(t)$ vaut 1, donc $e(t) = 2$. À partir de $t = 1$, les deux échelons valent 1 et $e(t) = 1$. Le tracé présente donc un saut en 0, puis un autre en 1.

Signal d’entrée e(t)



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$. Par linéarité, on transforme chaque terme de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, puis on regroupe sur le même dénominateur.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/[p(p + 1)]]e^(−p).

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. En substituant les expressions de $H(p)$ et $E(p)$, puis en distribuant le facteur $1/(p+1)$, on obtient :

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\frac{2-e^{-p}}{p} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

Mettons les deux fractions au même dénominateur. Le numérateur obtenu vaut $(p+1) - p = 1$, ce qui vérifie l'identité :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(−p) et de (1/(p + 1))e^(−p).

On utilise les transformées usuelles et la propriété de retard d'une unité pour les termes contenant e^{-p} :

1. $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$.
2. $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$.
4. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Pour $0 \leq t < 1$, le terme retardé est nul puisque $U(t-1) = 0$. Les deux premiers termes donnent alors la sortie sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e − 2)e^(−t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

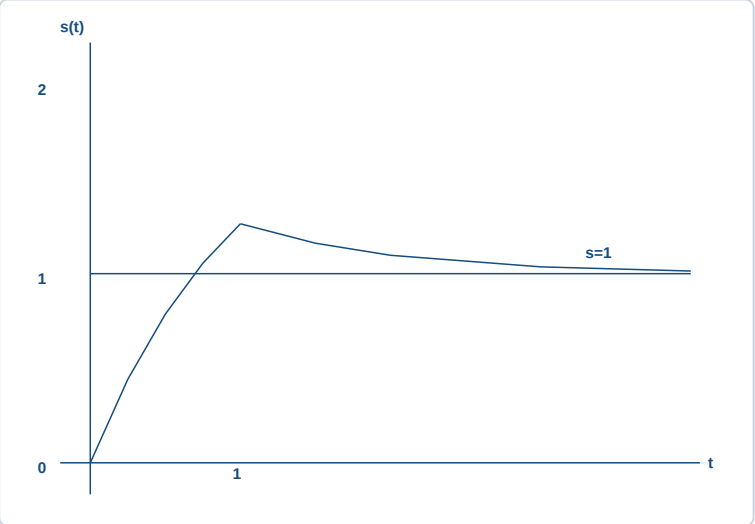
En remplaçant t par 1 dans l'expression donnée, on obtient $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Numériquement, cette valeur est environ $1{,}2642$, soit $1{,}3$ au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la sortie est croissante selon $s(t) = 2(1 - e^{-t})$. Elle atteint $2 - 2/e \approx 1{,}264$ en $t = 1$. Ensuite, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$ décroît et tend vers 1. Les deux expressions se raccordent en $t = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe croît de $(0;0)$ à $(1; 2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Comme e^{-t} tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel s'annule à la limite et il ne reste que la constante 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, en mobilisant équations différentielles, fonctions, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t_0,t_1] f(t) dt.
- La transformée de Laplace de f(t − a)U(t − a) est F(p)e^(−ap), ce qui permet de traiter un signal retardé.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier les unités : une vitesse en mètres par seconde intégrée par rapport au temps en secondes donne une distance en mètres.
- Pour dresser un tableau de variations, étudier le signe de la dérivée sur tout l'intervalle demandé.
- À l'ordre 2, écrire le reste du développement limité sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec ε(t) qui tend vers 0.
- Pour les signaux, distinguer les intervalles séparés par le retard t = 1 et soigner les tracés sur le document-réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser la condition initiale dans une équation différentielle ?

Déterminez d'abord la solution générale, puis remplacez t par 0 et la fonction par sa valeur initiale. L'équation obtenue fixe la constante et donne la solution correspondant au phénomène étudié.

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse ?

Si F est une primitive de la vitesse f, la distance entre t_0 et t_1 vaut $F(t_1) - F(t_0)$. Avec le temps en secondes et la vitesse en mètres par seconde, le résultat est en mètres.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

L'épreuve comporte deux exercices de dix points. Répartissez le temps entre l'étude du chariot et celle du système électrique, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les tracés demandés.

Q : Quelle précaution prendre pour les transformées de Laplace avec retard ?

Repérez le retard a et associez-le au facteur e^(−ap). Pour retrouver la fonction temporelle, appliquez la propriété de translation du formulaire au signal décalé et tenez compte de l'échelon unité.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsfabcr.fr/assets/annales/bts-fabcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS FABCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Finitions, Aménagements des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.