Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de conformité et durée de vie des tubes fluorescents, estimation de conformité des rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsfabcr.fr/assets/annales/bts-fabcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS FABCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine avance initialement à 20 m/s, puis ralentit sous l'effet d'un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle, étudiée avec une équation différentielle, ses variations, une primitive, un développement limité et une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

La formule donnée pour l'équation homogène $y' + ay = 0$ fournit les solutions $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ici, le coefficient de y vaut $a = 0{,}8$. On le remplace dans cette formule : elle donne toutes les solutions sur l'intervalle étudié, sans condition initiale supplémentaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = Ce^{-0{,}8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc sa dérivée est nulle.

$$g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4.$$

Le membre de gauche est ainsi égal au second membre de l'équation (E), quel que soit $t \geq 0$. La fonction g vérifie donc bien cette équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E), car $g'(t) + 0{,}8g(t) = 4$.

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

On utilise la solution particulière constante $g(t) = 5$ et les solutions de l'équation homogène associée. La somme d'une solution particulière et d'une solution homogène donne toutes les solutions de l'équation complète.

1. Solution particulière : $g(t) = 5$.
2. Solution homogène : $y_h(t) = Ce^{-0{,}8t}$.
3. Solution générale : $y(t) = g(t) + y_h(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'ensemble des solutions de (E) est $y(t) = 5 + Ce^{-0{,}8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La forme générale trouvée précédemment est $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $5 + C = 20$. On en déduit $C = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction qui respecte la condition initiale du problème.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend donc vers 0, et le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, il ne reste alors que le terme constant. La limite de $f(t)$ vaut donc 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de la vitesse lorsque $t \to +\infty$ est 5.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative d'une fonction qui tend vers une limite finie admet une asymptote horizontale à cette ordonnée. Ainsi, lorsque le temps augmente, la courbe C se rapproche de la droite horizontale dont l'équation est $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe C admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

Question 2. En admettant que, pour tout t de [0 ; +∞[, f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. La dérivée $f'(t) = -12e^{-0,8t}$ est donc strictement négative, et f est strictement décroissante. On a $f(0) = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0;+\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit atteindre zéro. Or l'exponentielle est strictement positive à tout instant fini, donc $15e^{-0,8t} > 0$ et la vitesse reste supérieure à 5 m/s.

- La vitesse ne s'annule jamais.
- Elle tend vers 5 m/s quand t tend vers $+\infty$.

Dans le cadre du modèle étudié, le freinage ne conduit donc pas à l'arrêt du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à 5 m/s et ne s'annule pas.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$. Par dérivation de l'exponentielle composée, $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t} + 5$. Le coefficient obtenu est $18{,}75 \times 0{,}8 = 15$. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$ pour tout $t \geq 0$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Comme $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance parcourue entre les instants t₀ et t₁ est donnée par d = ∫ de t₀ à t₁ f(t)dt. Calculer la valeur exacte de la distance entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Une primitive permet de calculer l'intégrale par différence aux bornes.

1. $d = F(1) - F(0)$.
2. $d = (-18{,}75e^{-0,8} + 5) - (-18{,}75) = 18{,}75(1 - e^{-0,8}) + 5$ m.

La valeur exacte est donc $18{,}75(1 - e^{-0,8}) + 5$ m. Numériquement, elle vaut environ $15{,}3251$ m, soit $15{,}33$ m au centimètre près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Distance exacte : $18{,}75(1 - e^{-0,8}) + 5$ m. Au centimètre près : $15{,}33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les trois propositions, choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification. Une réponse fausse, plusieurs réponses ou une absence de réponse ne rapportent aucun point et n'en enlèvent pas.

La troisième proposition est celle à recopier : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale donne $f(0) = 20$, et la dérivée fournie donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces deux valeurs dans la formule de la tangente, on obtient son équation dans le repère du sujet.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 est $y = 20 - 12t$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie des tubes fluorescents, estimation de conformité des rivets

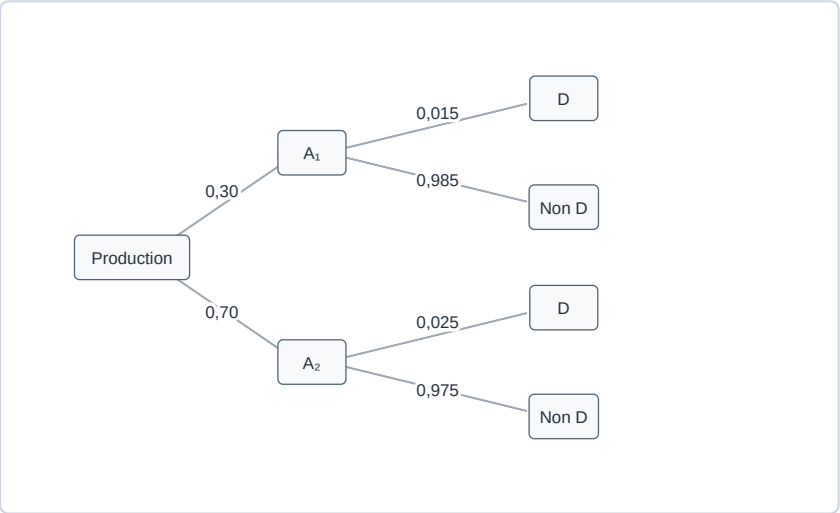
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, et des tests permettent de repérer les défauts. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles de défaut, la durée de fonctionnement modélisée par une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions de production et des taux de défaut des ateliers 1 et 2, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

On lit sur l'énoncé que l'atelier 1 produit 30 % des tubes et l'atelier 2, 70 %. Les probabilités de défaut sont conditionnelles à l'atelier : 0,015 depuis A_1 et 0,025 depuis A_2. Les branches « non D » portent les probabilités complémentaires, soit 0,985 et 0,975. L'arbre ci-dessous représente ces deux étapes et leurs pondérations.

Arbre pondéré des ateliers et défauts



Les probabilités de défaut sont conditionnelles à l'atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70. Depuis A_1 : D 0,015, non D 0,985. Depuis A_2 : D 0,025, non D 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit $P(A_1 \cap D)$.

Pour obtenir la probabilité d'un chemin de l'arbre, on multiplie la probabilité de la première branche par la probabilité conditionnelle de la seconde. Ici, le tube doit provenir de l'atelier 1 et être défectueux : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cette valeur est la proportion de tubes réunissant ces deux caractéristiques dans la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.**

Un tube défectueux provient soit de l'atelier 1, soit de l'atelier 2. Ces deux cas étant incompatibles, on additionne les probabilités des deux chemins aboutissant à D :

$$P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022.$$

La probabilité totale de défaut est donc de 0,022.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant qu'un tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche une probabilité conditionnelle parmi les tubes sans défaut. Le numérateur est la probabilité d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut, et le dénominateur est la probabilité d'absence de défaut. En appliquant la formule du quotient :

1. $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825.$
2. $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{1 - 0,022} \approx 0,698.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T, exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

L'énoncé original donne le paramètre exponentiel $\lambda = 0,0001$ par heure. Pour une loi exponentielle, l'espérance vaut l'inverse du paramètre : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents considérés.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures, durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule fournie est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $t = 8\,000$ heures et $\lambda = 0,0001$, on calcule :

$$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}55067.$$

La loi étant continue, les probabilités pour $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ sont identiques. L'arrondi demandé est au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est le complément de la fonction de répartition, soit $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour 10 000 heures, le calcul donne :

1. $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1}$.
2. $e^{-1} \approx 0{,}36788$, donc l'arrondi au centième est 0,37.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Un échantillon de 1 000 rivets contient 975 rivets conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence des rivets conformes observée dans l'échantillon. Celui-ci compte 975 rivets conformes sur 1 000. Ainsi, $\hat{p} = f = \dfrac{975}{1000} = 0{,}975$. Cette estimation correspond à la proportion observée dans l'échantillon, et non nécessairement à la proportion exacte de toute la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\hat{p} = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. **En utilisant la formule donnée pour l'intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle centré sur la fréquence observée pour p. Arrondir les bornes au millième.**

La formule de l'énoncé utilise la fréquence $f = 0{,}975$ et l'effectif $n = 1\,000$. La marge vaut $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. Les bornes sont donc $0{,}975 - 0{,}009677$ et $0{,}975 + 0{,}009677$. On les arrondit au millième comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Elle étudie le freinage d'un chariot, la fabrication de tubes fluorescents et la conformité de rivets, en évaluant équations différentielles, fonctions, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont y(t) = ke^(-at) ; ajouter une solution particulière donne les solutions de l'équation non homogène.
- Si f(t) tend vers une limite finie L lorsque t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et l'espérance vaut E(T) = 1/λ.
- L'intervalle de confiance à 95 % indiqué pour une proportion est f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter la condition initiale f(0) = 20 et le domaine [0 ; +∞[dans la résolution et l'étude de la fonction.
- Pour le tableau de variation, relier le signe de f' au sens de variation et faire apparaître la valeur initiale et la limite.
- Dans l'arbre pondéré, distinguer probabilités des ateliers et probabilités conditionnelles de défaut.
- Respecter les unités et les arrondis demandés : centimètre, centième ou millième selon la question.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène : ses solutions sont ke^(-0,8t). Ajoutez la solution particulière constante 5, puis utilisez f(0) = 20 pour déterminer k. La fonction obtenue modélise la vitesse du chariot.

Q : Comment calculer une probabilité avec la loi exponentielle de cet exercice ?

Pour λ = 0,001, utilisez P(T ≤ t) = 1 - e^(-0,001t). Pour une durée supérieure à t, utilisez le complément e^(-0,001t). L'espérance 1/λ s'exprime en heures.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. Le sujet indique un coefficient 2 pour les spécialités listées, sauf Traitement des matériaux, dont le coefficient est 3.

Q : Quels éléments faut-il soigner pour répondre aux attentes de notation ?

Le sujet demande notamment des justifications, des calculs et des interprétations dans le contexte. Respectez les consignes de précision et d'arrondi, et recopiez une seule proposition pour la question à choix multiples.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsfabcr.fr/assets/annales/bts-fabcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS FABCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Finitions, Aménagements des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.