Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Démarrage d'un train à très haute vitesse et aire d'une pièce de gare (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence des smartphones (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsfabcr.fr/assets/annales/bts-fabcr/E2 - Mathématiques/2018/BTS FABCR - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Démarrage d’un train à très haute vitesse et aire d’une pièce de gare

Un projet de train à propulsion électromagnétique impose au wagon d’atteindre une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes. L’exercice étudie sa distance et sa vitesse au moyen d’une équation différentielle et d’une fonction, puis calcule l’aire d’une pièce de gare à partir d’une figure symétrique.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0, en utilisant la formule fournie.

On réécrit l’équation sous la forme $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. La formule donnée conduit à $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par sa valeur, on obtient l’ensemble des solutions sur l’intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On dérive la fonction proposée : $g'(t) = -15$. Puis on calcule le membre de gauche de l’équation différentielle en y substituant g et sa dérivée. Le résultat est bien égal au second membre $3t$, pour tout $t \in [0, 3]$. La vérification confirme donc que cette fonction est une solution particulière.

$g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est une solution de $y' - 0,2y = 3t$.

Question 3°. Déduire de la solution de l’équation homogène et de la solution particulière donnée l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Pour une équation différentielle linéaire avec second membre, toute solution s’écrit comme la somme d’une solution particulière et d’une solution de l’équation homogène associée. On additionne donc $g(t) = -15t - 75$ et la solution homogène trouvée à la question 1. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0, sachant que le wagon est au point de départ à t = 0.

On applique la condition initiale à la solution générale. À $t = 0$, l'exponentielle vaut 1 et le terme en t s'annule, donc $f(0) = k - 75$. Comme le wagon part de l'origine, cette valeur doit être nulle. On en déduit la constante, puis on la remplace dans l'expression générale.

Condition	Conséquence
$f(0) = 0$	$k - 75 = 0$, donc $k = 75$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir de l'expression fournie de f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

La dérivée donnée est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Puisque 15 est positif, l'inégalité demandée équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. La fonction exponentielle étant croissante, cela revient à $0, 2t \geq 0$, soit $t \geq 0$. Sur le domaine étudié, l'inégalité est vérifiée partout.

Valeur de t	$t = 0$	$0 < t \leq 3$
Signe de $f'(t)$	nul	positif

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

t	**0**	**3**
Signe de $f'(t)$	0	positif sur $]0, 3]$
Variation de f	$f(0) = 0$	$f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$, soit environ $16, 659$

La dérivée est positive après l'extrémité gauche de l'intervalle. Ainsi, f est croissante sur $[0, 3]$, de 0 à $75(e^{0,6} - 1) - 45$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f est croissante sur $[0, 3]$, de 0 à environ $16, 659$ km.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute, en kilomètres, et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue après une minute est obtenue en évaluant f en $t = 1$. Avec l'expression fournie, on calcule $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$, soit environ $1,6052$ km. L'énoncé demande un arrondi au dixième : le chiffre des centièmes conduit à retenir 1,6 km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(1) \approx 1,6$ km.

Question 3° a). Sachant que la vitesse du wagon en kilomètres par minute à l'instant t est donnée par f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse en kilomètres par minute est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. À deux minutes, on remplace t par 2 : $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$. Cette valeur est environ $7,3774$ km/min. En arrondissant au dixième, on conserve un chiffre après la virgule.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(2) \approx 7,4$ km/min.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

L'objectif est atteint si la vitesse de 400 km/h est franchie avant deux minutes. La vitesse augmente sur $[0, 3]$, car $f'(t)$ est croissante et positive pour $t > 0$. À deux minutes, elle vaut $15(e^{0,4} - 1)$ km/min, soit environ $442,6$ km/h après conversion. Le seuil a donc été atteint avant cet instant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le wagon dépasse 400 km/h avant deux minutes.

Question 4°. Parmi les trois expressions proposées, choisir l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Parmi les réponses proposées, on retient celle qui correspond à la formule de la tangente au point d'abscisse 2, soit $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. En substituant les expressions de $f'(2)$ et $f(2)$, puis en développant, on obtient la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Parmi les trois valeurs proposées, choisir l'aire A1 du rectangle OPQR en unités d'aire, en vous appuyant sur le schéma.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ a pour largeur la distance de l'axe des ordonnées à l'abscisse 3, soit 3 unités. Sa hauteur est celle du bord supérieur, $y = 2,25$. L'aire est donc le produit de ces deux dimensions. Cette valeur correspond à la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. En exploitant la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire cherchée est son intégrale entre ces bornes. La primitive fournie est $\frac{27}{4}\ln(x^2+9) + c_1$. On évalue cette primitive en 3 puis en 0 : la différence des logarithmes devient $\ln(18) - \ln(9) = \ln 2$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A hachurée, en unités d'aire, et arrondir le résultat au millième.

Calcul sur la moitié droite	Aire
Rectangle $OPQR$	$6,75$
Sous la courbe g	$\frac{27}{4}\ln 2$
Différence, puis symétrie	$2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right)$

La zone hachurée est la différence entre le rectangle et l'aire sous la courbe, à droite de l'axe des ordonnées. La pièce étant symétrique, on double cette différence pour obtenir l'aire totale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A = 13,5 - \frac{27}{2}\ln 2 \approx 4,143$ u. a.

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence des smartphones

L'exercice étudie l'obsolescence technique et logicielle de smartphones à partir de données portant sur 200 appareils, puis modélise le nombre d'appareils non réparables dans un lot de modèle A. Il se termine par un test bilatéral qui confronte un sondage sur l'opinion relative à la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données de l'énoncé, compléter le tableau d'effectifs croisant les smartphones touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle, pour la population de 200 appareils.

Sur 200 appareils, 3 % sont touchés par T, soit 6, et 8 % par L, soit 16. Parmi les appareils touchés par L, 12,5 % le sont aussi par T : cela donne 2 appareils dans la case commune. Les autres effectifs se déduisent des totaux.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	**2**	**4**	**6**
non touchés par l'obsolescence technique	**14**	**180**	**194**
Total	**16**	**184**	200

Sujets d'Examens de...

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : T et L, 2 ; T seul, 4 ; L seul, 14 ; aucun des deux, 180.

Question 2°. Pour un smartphone choisi au hasard parmi les 200 étudiés, donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'événement « obsolescence technique » et L l'événement « obsolescence logicielle ».

Les pourcentages de l'énoncé donnent directement les probabilités marginales : 3 % pour l'obsolescence technique et 8 % pour l'obsolescence logicielle. La probabilité conditionnelle demandée concerne les smartphones touchés par L. L'énoncé précise que, dans ce groupe, 12,5 % sont également touchés par T. On reporte donc ces trois fréquences sous forme décimale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T) = 0,03 ; P(L) = 0,08 ; P_L(T) = 0,125.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché par les deux types d'obsolescence.

La probabilité d'être touché par les deux types d'obsolescence se calcule à partir de la probabilité conditionnelle donnée pour les appareils touchés par L :

$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,08 \times 0,125 = 0,01.$

La part des smartphones concernés simultanément par T et L est donc de 1 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T ∩ L) = 0,01, soit 1 %.

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

Pour déterminer la probabilité d'être touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence, on additionne les probabilités de T et L puis on retranche leur intersection, comptée deux fois dans cette somme. Ainsi :

$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10.$

La probabilité cherchée correspond à 10 % des smartphones.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T ∪ L) = 0,10, soit 10 %.

Question 3° c). Calculer la probabilité conditionnelle P_T(L), c'est-à-dire la probabilité d'une obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité conditionnelle de L sachant T s'obtient en divisant la probabilité de l'intersection par celle de T. D'après les questions précédentes, $P(T \cap L) = 0,01$ et $P(T) = 0,03$. On calcule donc :

$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0,01}{0,03} = \frac{1}{3}.$

Le résultat est arrondi au millième, conformément à la consigne de l'exercice.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P_T(L) ≈ 0,333, soit environ 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement est un essai à deux issues : le smartphone est non réparable ou réparable. La probabilité d'obtenir un appareil non réparable reste égale à 0,045. Le stock étant suffisamment important, l'énoncé assimile les prélèvements à des tirages avec remise : les 50 essais sont indépendants et de même probabilité. Le nombre X de smartphones non réparables suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,045$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50; 0,045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones du lot soient tous réparables.

Si les 50 smartphones sont tous réparables, aucun n'est non réparable : l'événement correspond à $X = 0$. La probabilité qu'un appareil soit réparable est $1 - 0,045 = 0,955$. Comme les tirages sont indépendants, la probabilité que les 50 appareils soient réparables est :

$P(X = 0) = 0,955^{50} \approx 0,100$.

La probabilité est arrondie au millième, comme demandé dans l'énoncé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 appareils soient réparables est environ 0,100, soit 10,0 %.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme fourni et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et les valeurs successives de S pour i allant de 0 à 3.

On calcule les probabilités de la loi binomiale pour $i = 0, 1, 2, 3$, puis on les additionne successivement à S. Les probabilités sont affichées au millième ; les cumuls sont calculés à partir des valeurs non arrondies, puis arrondis au millième.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

À chaque étape, S contient la somme des probabilités de $X = 0$ jusqu'à la valeur courante de i.

Tableau de l’algorithme complété

i	0	1	2	3
$P(X=i)$	0,100	0,272	0,205		
S	0,100	0,608	0,813		

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l’algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, S est la somme des probabilités correspondant à $X = 0, 1, 2, 3$. Elle représente donc la probabilité qu’un lot compte au plus trois smartphones non réparables. En additionnant les probabilités obtenues dans le tableau, on trouve une valeur d’environ 0,813.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots comptent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l’espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte des lots de smartphones.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l’espérance est égale à np. Ici, le lot contient 50 smartphones et la probabilité qu’un appareil soit non réparable vaut 0,045. On obtient :

$E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25.$

Sur un grand nombre de lots, le nombre moyen d’appareils non réparables est donc 2,25 par lot. Ce nombre moyen n’est pas un effectif possible pour un lot individuel.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2,25$: un lot contient en moyenne 2,25 smartphones non réparables.

C. Test d’hypothèse

Question 1°. Sous l’hypothèse nulle H0, choisir parmi les valeurs proposées l’approximation de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, la loi normale a pour écart type 0,037. L’intervalle central de probabilité 0,95 s’écrit approximativement $[0,55 - 1,96 \times 0,037\ ;\ 0,55 + 1,96 \times 0,037]$. La demi-largeur vaut $h = 1,96 \times 0,037 = 0,07252$. Arrondie au centième, elle est égale à 0,07, qui est l’une des valeurs proposées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0,07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Le test est bilatéral et son seuil est de 5 %. Sous H_0 : $p = 0,55$, on conserve les fréquences situées dans l'intervalle central de 95 %. D'après la valeur de h arrondie au centième, cet intervalle est $[0,55 - 0,07\ ;\ 0,55 + 0,07] = [0,48\ ;\ 0,62]$.

- Si la fréquence observée est comprise entre 0,48 et 0,62, on ne rejette pas H_0.
- Si elle est extérieure à cet intervalle, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Rejeter H_0 si la fréquence observée est hors de [0,48 ; 0,62] ; sinon, ne pas la rejeter.

Question 3°. Sur l'échantillon de 180 personnes, 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Formuler la conclusion du test.

La fréquence observée est $76/180 \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle d'acceptation du test. Elle se trouve donc dans la région de rejet. Au seuil de 5 %, les résultats de l'enquête conduisent à rejeter l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes concernées est égale à 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$76/180 \approx 0,422 < 0,48$: on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, groupement B, code MATGRB1, durée de deux heures et coefficient variable selon la spécialité. L'exercice 1 porte sur le démarrage d'un train à très haute vitesse et l'aire d'une pièce de gare. L'exercice 2 traite de l'obsolescence des smartphones et évalue équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - 0,2y = 3t, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Si f(t) représente une distance en kilomètres et t un temps en minutes, f'(t) est une vitesse en km/min.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n,p), E(X) = np et P(X = i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i).
- Dans un test bilatéral, la région de non-rejet est l'intervalle centré sur la valeur supposée, déterminé par le seuil choisi.

Points de vigilance & attentes du jury

- Convertir la vitesse de km/min en km/h avant de la comparer à l'objectif de 400 km/h.
- Dans un tableau d'effectifs, distinguer les intersections des marges et vérifier que les totaux correspondent à 200.
- Pour reconnaître une loi binomiale, vérifier le nombre fixe d'essais, leur indépendance et une probabilité constante.
- Pour le test, calculer la fréquence observée, la comparer à l'intervalle de décision, puis conclure dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment reconnaître la loi binomiale dans le prélèvement de smartphones ?

Le lot comporte 50 prélèvements assimilés à des tirages avec remise. Chaque appareil est réparable ou non, avec une probabilité constante de non-réparabilité égale à 0,045. X compte les appareils non réparables.

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle à partir du tableau d'effectifs ?

La probabilité de A sachant B se calcule en divisant l'effectif correspondant à A et B par l'effectif total de B. Le dénominateur est donc la marge de l'événement qui conditionne.

Q : Comment organiser le travail pendant cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points, chacun divisé en parties indépendantes. Répartissez le temps entre les deux exercices, traitez d'abord les questions maîtrisées et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis.

Q : Qu'attend-on pour conclure un test d'hypothèse ?

Il faut appliquer la règle de décision au résultat observé, puis dire si l'échantillon conduit à rejeter ou non l'hypothèse nulle au seuil fixé. La conclusion doit répondre à la question sans présenter le résultat comme une certitude absolue.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsfabcr.fr/assets/annales/bts-fabcr/E2 - Mathématiques/2018/BTS FABCR - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Finitions, Aménagements des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.